Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Estatística I

Licenciatura em Gestão e Licenciatura em Finanças
2.º Ano/2.º Semestre
2023/2024

Aulas Teóricas N.º 8 e 9 (Semana 5)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas (Semanas 1 a 3)	Aulas Teóricas (Semanas 3 a 5)	Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teóricas (Semanas 8 a 13)
• **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Distribuições Teóricas • **Capítulo 6**: Amostragem. Distribuições por Amostragem.

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

https://cas.iseg.ulisboa.pt

Aula 5	Classificação de variáveis aleatórias. V.a. discreta: Função probabilidade: propriedades e exemplos. V.a. contínua: Função densidade de probabilidade: propriedades e exemplos.
Aula 6	V.a. mistas, exemplo. Funções de uma v.a.: método para v.a. discretas e método geral. Exemplos.
Aula 7	Funções de uma v.a. Valor esperado de uma v.a. discreta e valor esperado de uma v.a. contínua. Exemplos. Valor esperado de uma função de uma v.a.: caso discreto.
Aula 8	Propriedades do valor esperado. Momentos em relação à origem e momentos em relação à média. O valor esperado como medida de localização. Variância como medida de dispersão. Propriedades. Desvio padrão e coeficiente de variação.
Aula 9	Coeficiente de assimetria e coeficiente de kurtosis. Exemplo. Quantil de ordem alfa para distribuições contínuas. Mediana como medida de localização, amplitude inter-quartis como medida de dispersão. Exemplo.

1

Variáveis Aleatórias Contínuas

Variável Aleatória, Função de Distribuição, Função Densidade de Probabilidade, Valor Esperado, Moda, Variância e Quantis

Variável Aleatória Contínua

Definição 1.1: (Variável aleatória contínua) Uma variável aleatória X é contínua se assume valores num intervalo da reta real, ou seja, o número de valores que X pode assumir é não enumerável.

EXEMPLOS:

- Tempo até a cura de uma doença;
- Peso das peças em uma linha de produção;
- Salário dos estatísticos em João Pessoa.

Probabilidade II (ufpb.br)

Variável Aleatória Contínua

- Uma vez que os valores possíveis de X não são enumeráveis, não podemos falar do i-ésimo valor de X, e, por isso, $p(x_i)$ se torna sem sentido.
- Em vez de atribuir, como no caso discreto, probabilidades aos valores da variável, pode-se atribuir probabilidades a intervalos de valores da variável contínua por meio de uma função.
- A ideia então é substituir a função p definida somente para $x_1, x_2, \ldots$ por uma função f definida para todos os valores de x.

[Probabilidade II (ufpb.br)]

V.a. Contínua: Função Densidade de Probabilidade (fdp)

Para variáveis aleatórias contínuas introduzimos a **função densidade de probabilidade (fdp),** tal que,

$$(a)\quad f(x) \geq 0$$

$$(b)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

A condição (a) implica que a densidade é uma função não negativa e condição (b) corresponde ao fato de que a soma (integral no caso de variáveis contínuas) das probabilidades é igual a um. A integração de ±oo significa que devemos integrar sobre todos os valores de x em que f(x) é definida.

Qualquer função f(x) satisfazendo (a) e (b) é uma fdp.

Note que para variáveis contínuas as somas são substituídas por integrais.

Tópico_08_.pdf (usp.br)

Variável Aleatória Contínua: fdp

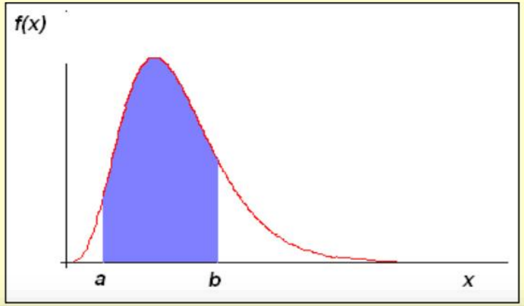
Uma v.a. X contínua é caracterizada por sua ***função densidade de probabilidade*** $f(x)$, com as propriedades:

(i) A área sob a curva de densidade é 1;

(ii) $P(a \leq X \leq b)$ = área sob a curva da densidade $f(x)$ e acima do eixo x, entre os pontos a e b;

(iii) $f(x) \geq 0$, para todo x;

(iv) $P(X = x_0) = 0$, para x_0 fixo.



Assim

Note que, como a probabilidade da variável x assumir valor num dado ponto é nula, temos que: $P(a < x < b) = P(a \leq x \leq b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b)$

Não é possível apresentar a imagem.

Variável Aleatória Contínua: Probabilidades

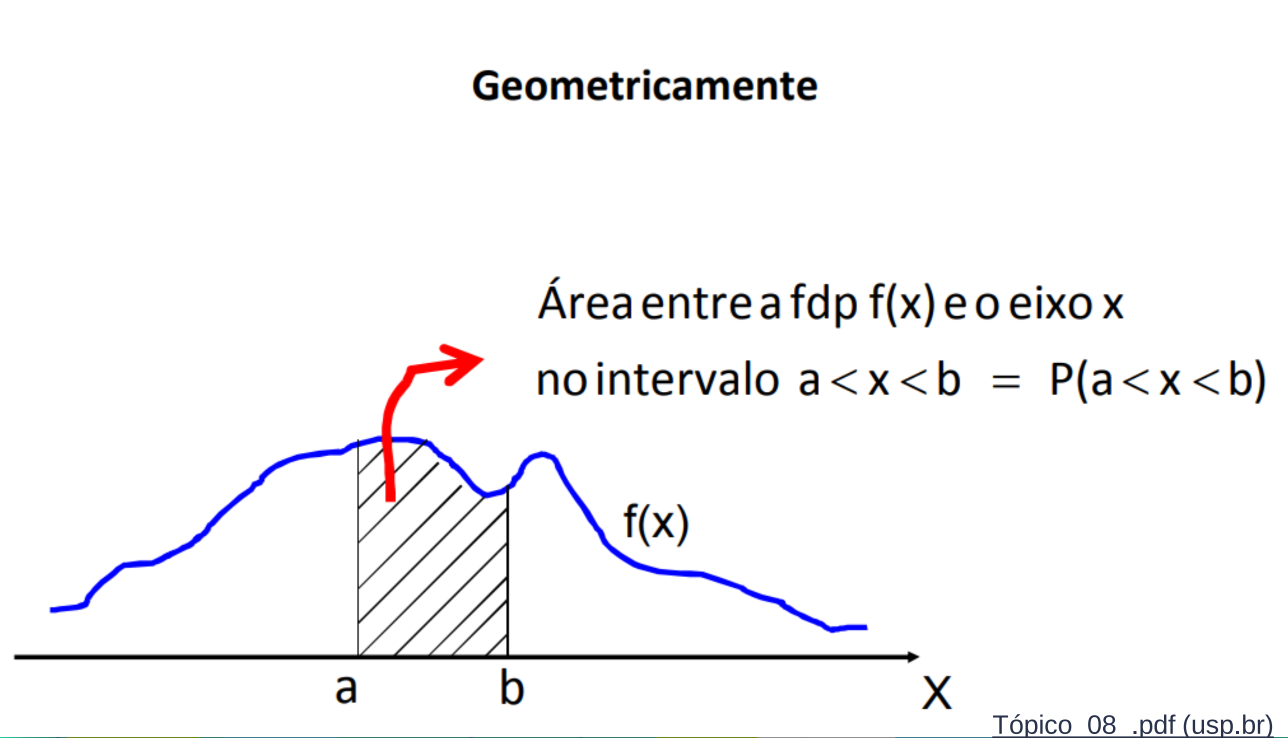
Para variáveis contínuas não podemos obter a probabilidade de x ter o valor num ponto $(x = a)$, ou seja, temos que considerar a probabilidade de x assumir valores num intervalo $a < x < b$.

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

representa a probabilidade de x assumir valores no intervalo $a < x < b$.

[Tópico_08_.pdf (usp.br)]

Variável Aleatória Contínua: Probabilidades



Tópico_08_.pdf (usp.br)

Cálculo de Probabilidades para uma Distribuição Contínua: Exemplo

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 1 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

(a) verifique se f(x) é uma fdp.

(b) Calcule a probabilidade de X assumir valores no intervalo $2 < x < 3$

Tópico_08_.pdf (usp.br)

Cálculo de Probabilidades para uma Distribuição Contínua: Exemplo

(a) Temos que $f(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{4} \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}\,x\Big|_{1}^{4} = \frac{1}{3}\,(4\text{-}1) = 1$

portanto f(x) é uma fdp.

(b) Temos: $P(2 < x < 3) = \int_{2}^{3} \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}\,x\Big|_{2}^{3} = \frac{1}{3}\,(3\text{-}2) = \frac{1}{3}$

Tabela 1.1: Tabela de Primitivas Elementares

f	$Pf = F$
$c, c \in IR$	$c\,x$
x^{α} $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^{x}	e^{x}
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\sec^2 x$	$\mathrm{tg}x$
$\mathrm{cosec}^2 x$	$-\mathrm{cotg}x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\,x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$

Tópico_08_.pdf (usp.br)

Média, Variância e Desvio-Padrão para V.a. Contínua

Do mesmo modo que para variáveis discretas, podemos definir para variáveis contínuas a média, a variância e o desvio padrão. Lembrando que introduzimos a fdp associada a variável aleatória considerada e substituímos as somas por integrais.

Assim, para a variável aleatória X, temos:

Média (μ): $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$

Variância (σ^2): $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\, dx$

Desvio-padrão: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$\boxed{\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)}$

Tópico_08_.pdf (usp.br)

Média, Variância e Desvio-Padrão para V.a. Contínua: Exemplo

Exemplo: Considere a fdp considerada anteriormente

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 1 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

(a) Calcule a média da variável aleatória X.

(b) Calcule a variância e o desvio padrão de X.

Tópico_08_.pdf (usp.br)

Média, Variância e Desvio-Padrão para V.a. Contínua: Exemplo

(a) Temos: $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{1}^{4} x\left(\frac{1}{3}\right) dx = \frac{1}{3}\int_{1}^{4} x\, dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{4} = \frac{1}{6}(4^2 - 1^2) = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

(b) Temos: $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\, dx = \int_{1}^{4} (x - \frac{5}{2})^2\left(\frac{1}{3}\right) dx = \frac{1}{3}\int_{1}^{4} (x - \frac{5}{2})^2\, dx = \frac{1}{3}\frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^3}{3}\Bigg|_{1}^{4} = \frac{3}{4}$

e assim: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Tópico_08_.pdf (usp.br)

Variável Aleatória Contínua: Função de Distribuição (fd)

Definição 1.2: (Variável aleatória absolutamente contínua) Uma variável aleatória X é absolutamente contínua se existir uma função não negativa f tal que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

em que F é a função de distribuição acumulada e f é a função densidade da variável aleatória X.

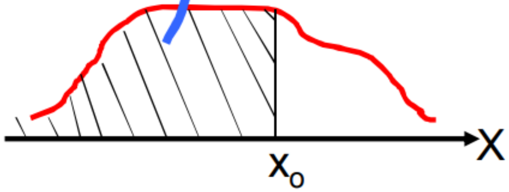
Variável Aleatória Contínua: fd

A função distribuição acumulada (fda) F(x) é a probabilidade de que $X \le x_o$, ou seja,

$$F(x_o) = P(X \le x_o) = \int_{-\infty}^{x_o} f(x)\,dx$$

F(x) é análoga a distribuição de frequências relativas acumuladas (ou % acumuladas) estudadas no início do curso

Área até x_o $=F(x_o)=P(X \le x_o)$



Tópico_08_.pdf (usp.br)

Variável Aleatória Contínua: Probabilidades

IMPORTANTE: A partir da definição de função de distribuição, tem-se que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Note que a integral acima não se altera com a inclusão ou não dos extremos *a* e *b*. Dessa forma, para as variáveis contínuas, a probabilidade da variável ser igual a um particular valor é zero.

Assim,

$$P(X(\omega) \in [a,b]) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$

$P(a \leq X \leq b)$ representa a área sob a curva da função densidade entre *a* e *b*.

Variável Aleatória Contínua: fdp vs fd

IMPORTANTE: A função de densidade serve para a caracterização da variável contínua. Dada a função de densidade, a função de distribuição é obtida por integração. Por outro lado, derivando a função de distribuição, obtemos a densidade.

Ou seja, utilizando o teorema fundamental de Cálculo, se $f(x)$ for contínua, temos a seguinte relação

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

fdp vs fd: Exemplo 1

Encontre a função de distribuição acumulada da seguinte função de densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \ 0 < x < 1, \\ 0,\ \textit{para quaisquer outros valores} \end{cases}$$

Probabilidade II (ufpb.br)

fdp vs fd: Exemplo 1

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \ 0 < x < 1, \\ 0, \ \textit{para quaisquer outros valores} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ se\ x < 0, \\ \int_0^x (2s)ds = x^2, \ se\ 0 \leq x < 1, \\ 1, \ se\ \ x \geq 1 \end{cases}$$

fdp vs fd: Exemplo 2

Arqueólogos estudaram uma certa região e mediram o *comprimento de fósseis* encontrados (em cm). Chamamos de **C** a v.a. contínua comprimento de fósseis. Suponha que C possui a função densidade de probabilidade:

$$f(c) = \begin{cases} \frac{1}{40}\left(\frac{c}{10}+1\right) & \text{se } \ 0 \leq c \leq 20; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de um fóssil, escolhido ao acaso nessa região, apresentar comprimento inferior a 8 cm?

fdp vs fd: Exemplo 2

$$f(c)=\begin{cases}\dfrac{1}{40}\left(\dfrac{c}{10}+1\right) & \text{se } 0\le c\le 20;\\ 0 & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

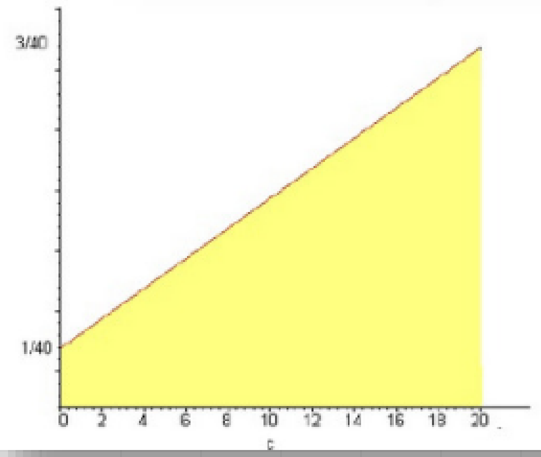
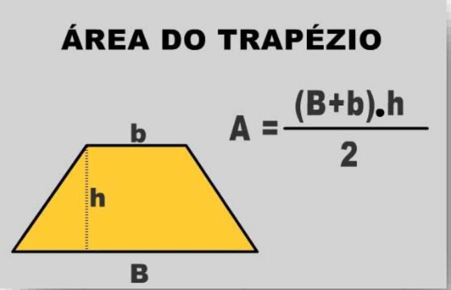


Gráfico da função densidade de probabilidade



A **área** do **trapézio** é a soma das bases vezes a altura dividido por dois.

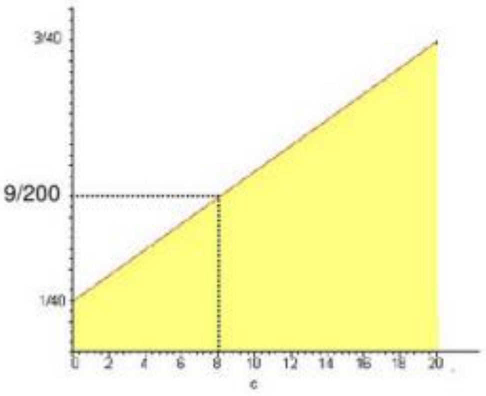
$$\text{Área sob } f(c)=\frac{(b+B)h}{2}=\frac{\left(\frac{1}{40}+\frac{3}{40}\right)20}{2}=1$$

$$\text{Área sob } f(c)=\int_0^{20}\frac{1}{40}\left(\frac{c}{10}+1\right)=1$$

- Como f(c) é positiva e a área é igual 1, podemos concluir que f(c) é efetivamente uma densidade.

fdp vs fd: Exemplo 2

- Qual a probabilidade de um fóssil, escolhido ao acaso nessa região, apresentar comprimento inferior a 8 cm?



$$f(8) = \frac{9}{200}$$

$$P(C < 8) = \frac{\left(\frac{1}{40} + \frac{9}{200}\right)8}{2} = \frac{7}{25}$$

$$P(C < 8) = \int_0^8 f(c)dc = \frac{7}{25}$$

V.a. Discreta vs V.a. Contínua

Seja X uma v.a. contínua, que toma valores num intervalo de $\mathbb{R}$ (ou em $\mathbb{R}$),

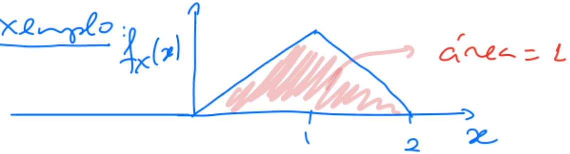
i) $P(X=x)=0, \quad \forall x$ [1ª grande diferença em relação às v.a. discretas]

Em vez de função de probabilidade, vamos definir:

$$\boxed{f_X(x)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P\left(x-\frac{\varepsilon}{2} \le X \le x+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}$$

↳ função densidade de probabilidade

Exemplo:



V.a. Discreta vs V.a. Contínua

v.a. discreta

propriedades: $P(X=x) \in [0,1]$

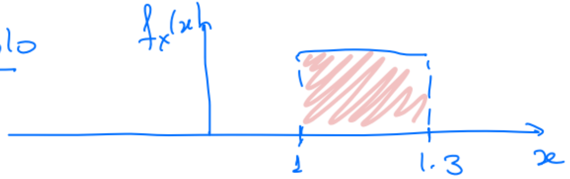
$$\sum_{x=-\infty}^{+\infty} P(X=x) = 1$$

v.a. contínua

propriedades:

- $f_X(x) \geq 0, \; \forall x$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

Exemplo



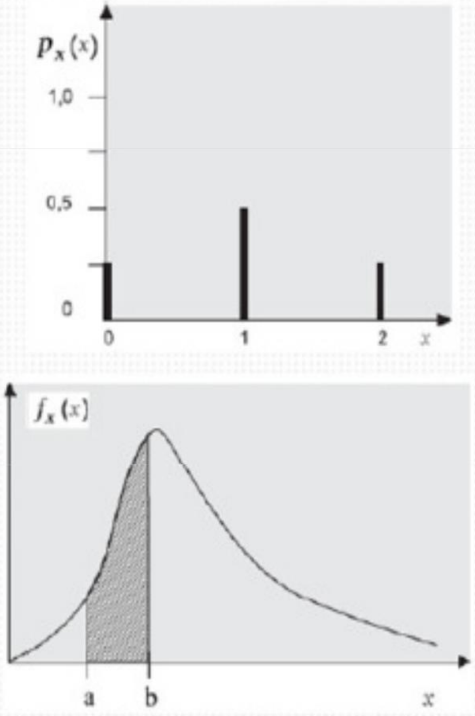
$\text{área} = (1.3 - 1)\,k = 1 \Rightarrow 0.3k = 1 \Rightarrow$

$$k = \frac{1}{0.3} = 3.33\ldots$$

Slides Professora Claúdia Nunes

V.a. Discreta vs V.a. Contínua

- Função massa de probabilidade
  - Indica com que probabilidade a variável aleatória x assume o valor x_o, *i.e.*, $P(x=x_o) = p_x(x_o)$.
  - A função massa de probabilidade se aplica a variáveis discretas.
- Função densidade de probabilidade
  - Equivale à função massa de probabilidade, sendo que se aplica a variáveis contínuas.



V.a. Discreta vs V.a. Contínua

$$P(X=x) \leftrightarrow f_X(x)$$

$$\Sigma \leftrightarrow \int$$

V.a. Discreta

- $F_X(x) = P(X \le x)$
  $= \sum_{y=-\infty}^{x} P(X=y)$
- $F_X(x) \in [0,1]$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- $P(X=x) = F_X(x) - F_X(x^-)$
- Não decrescente
- $P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a^-)$
- $P(a \le X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$
- $P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$

$=]-\infty, b] -]-\infty, a[$

V.a. Contínua

- $F_X(x) = P(X \le x)$
  $= \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$
- $F_X(x) \in [0,1]$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- A função F_X é contínua
  $f_X(x) = F_X'(x)$
- Não decrescente
- $P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$
  $= P(a \le X < b) = P(a < X < b)$
  $= F_X(b) - F_X(a)$

(porque $P(X=a) = P(X=b) = 0$)

V.a. Discreta vs V.a. Contínua

v.a. discretas | **v.a. contínuas**

- $E(X) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x\, P(X=x)$
- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$

$$E[aX+b] = aE(X)+b$$

- $E[g(X)] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} g(x)\, P(X=x)$
- $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx$

$$\mathrm{var}(X) = E[X^2] - E^2(X)$$

- $\mathrm{var}(X) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x^2 P(X=x) - E^2(X)$

  $= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x^2 P(X=x) - \left[\sum_{x=-\infty}^{+\infty} x\, P(X=x)\right]^2$
- $\mathrm{var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx - E^2(X)$

  $= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx\right]^2$

$$\mathrm{var}(aX+b) = a^2\, \mathrm{var}(X)$$

- mediana = me

  $0.5 \le F_X(me) \le 0.5 + P(X=me)$
- mediana = me

  $F_X(me) = 0.5$
- percentil de prob $p = x_p$

  $F_X(x_p) = p \qquad p \in (0,1)$

Slides Professora Claúdia Nunes

Características da Distribuição

Localização/Tendência

- **Central**: Moda, Mediana, Média
- **Não central ou relativa**: Alguns Quantis (Quartis, Decis, Percentis, Mínimo, Máximo)

Dispersão

- Amplitude Total ou Amostral, Amplitude Interquartil, Variância, Desvio Padrão, Coeficiente de Variação

Assimetria

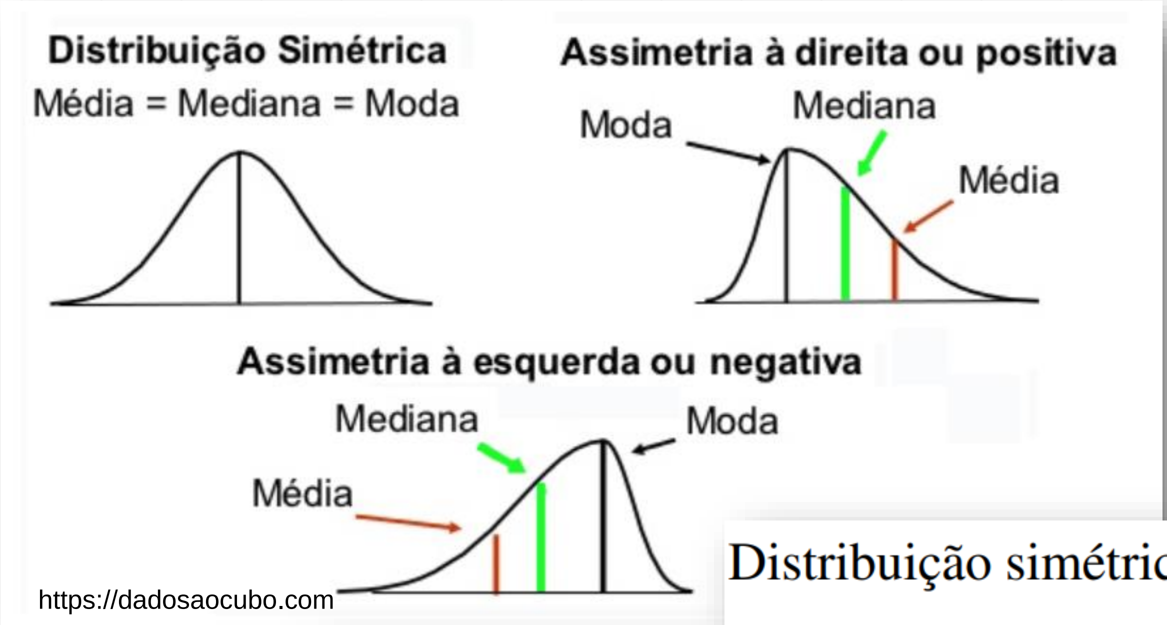
- Coeficientes de Assimetria

Achatamento/Curtose/Forma

- Coeficientes de Achatamento

Para avaliar o peso relativo da dispersão face à localização, utiliza-se o **coeficiente de variação**: CV $= \dfrac{\sigma}{\mu}$ (utiliza-se sobretudo se o suporte de $X \subset \Re^{+}$)

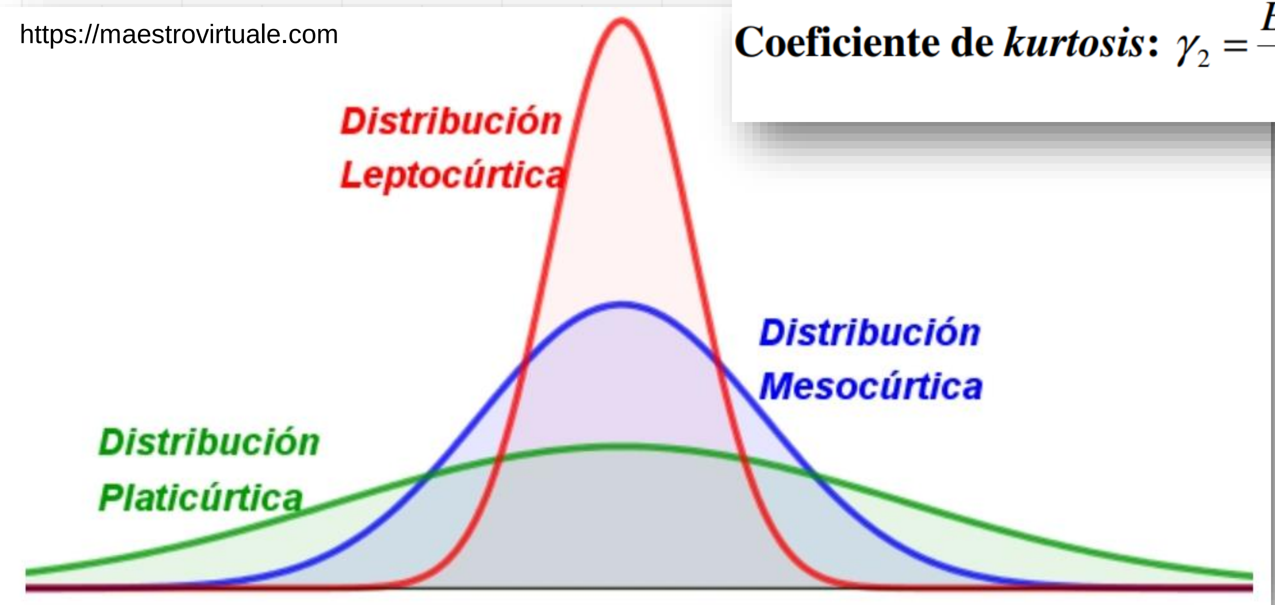
Assimetria/Enviesamento



$$\text{Distribuição simétrica} \rightarrow \gamma_1 = 0$$

$$\textbf{Coeficiente de assimetria: } \gamma_1 = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Achatamento/Curtose/Forma



Coeficiente de *kurtosis*: $\gamma_2 = \dfrac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4} = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4}$

o **grau de afastamento de uma certa distribuição em relação à distribuição normal**. Nesta distribuição tem-se $\gamma_1 = 0$, pois trata-se de uma distribuição simétrica, e $\gamma_2 = 3$.

Assimetria e Achatamento

Assimetria e curtose

A assimetria γ_1, a curtose β_2 e a curtose normalizada γ_2 são obtidas a partir das fórmulas dos momentos

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3} = 0 \\ \beta_2 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} = 3 \\ \gamma_2 = \beta_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

.[49]

A distribuição normal é um ponto de referência para comparação das espessuras de caudas longas. Se uma distribuição possui uma curtose normalizada $\gamma_2 > 0$, então a distribuição possui uma cauda longa mais grossa que a distribuição normal e é chamada leptocúrtica. Se $\gamma_2 < 0$, a distribuição possui uma cauda longa mais fina que a distribuição normal e é chamada platicúrtica. Se a distribuição possui uma curtose normalizada nula, então a distribuição possui uma cauda longa comparável à distribuição normal e é chamada mesocúrtica.[50][51]

Distribuição normal – Wikipédia, a enciclopédia livre (wikipedia.org)

Variáveis Aleatórias Contínuas: Exercícios

2

Variável Aleatória, Função de Distribuição, Função Densidade de Probabilidade, Valor Esperado, Moda, Variância e Quantis

4.1 Suponha que o desvio da medida das peças produzidas por uma máquina em relação à norma especificada pelo mercado é uma variável aleatória X com a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+k+x & , -1 \leq x < 0 \\ 1+k-x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{restantes valores de } x \end{cases}$$

(a) Calcule o valor de k.

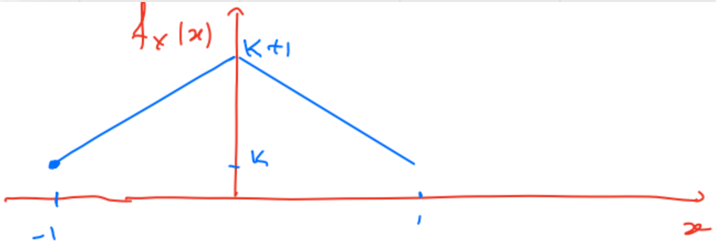
(b) Determine a função de distribuição de X.

(c) Calcule o valor esperado e a variância de X.

(d) Calcule a moda, a mediana e o $1^{\underline{o}}$ quartil de X.

(e) Calcule a probabilidade de que seja necessário extrair exactamente duas peças da produção da máquina para que apareça uma peça com um desvio positivo em relação à norma.

Exercício 4.1. (a): Função Densidade de Probabilidade

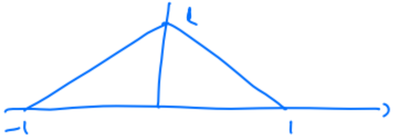


K: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{0}(1+k+x)dx + \int_0^1(1+k-x)dx = 1$

$\Leftrightarrow 1 + K + \frac{0-(-1)^2}{2} + 1 + k - \frac{1^2-0}{2} = 1$

$\Leftrightarrow 2 + 2K - 1 = 1 \Leftrightarrow k = 0$

ie:



Exercício 4.1. (b): Função de Distribuição

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{e.c.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x^2/2 + x + 1/2, & -1 \leq x < 0 \\ -x^2/2 + x + 1/2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \int_{-1}^{x} (1+y)\,dy & -1 \leq x < 0 \\ 0 + \int_{-1}^{0} (1+y)\,dy + \int_{0}^{x} (1-y)\,dy & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

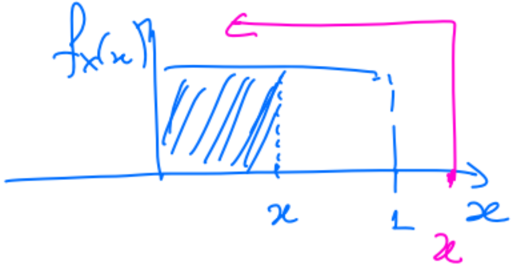
Tabela 1.1: Tabela de Primitivas Elementares

f	$Pf = F$
$c, c \in IR$	$c\,x$
$x^{\alpha}\ (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\sec^2 x$	$\mathrm{tg} x$
$\mathrm{cosec}^2 x$	$-\mathrm{cotg} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\, x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$

Exercício 4.1. (b): Função de Distribuição

outro exemplo:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x = \int_0^x 1\,dy & 0 \leq x < 1 \\ 1 = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy & x \geq 1 \end{cases}$$

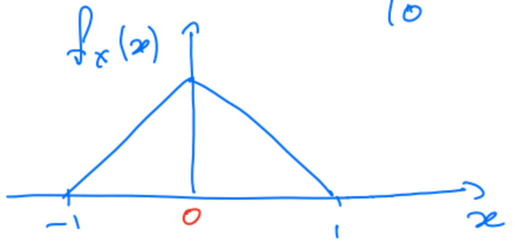
$$= 0 + \int_0^1 1\,dy + 0$$

(localização do x)

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 4.1. (c): Valor Médio e Variância

Relembrar: $f_X(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$



c) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{0} x(1+x)\, dx + \int_0^1 x(1-x)\, dx$

$= \int_{-1}^{0} (x + x^2)\, dx + \int_0^1 (x - x^2)\, dx$

$= \frac{0^2 - (-1)^2}{2} + \frac{0^3 - (-1)^3}{3} + \frac{1^2 - 0^2}{2} - \frac{1^3 - 0^3}{3} = 0$

Nota: se a f. densidade de probabilidade for simétrica em torno de um ponto, esse ponto é o valor esperado da v.a.

Exercício 4.1. (c): Valor Médio e Variância

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)\,dx + \int_0^1 x^2(1-x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^2+x^3)\,dx + \int_0^1 (x^2-x^3)\,dx$$

$$= \frac{0^3-(-1)^3}{3} + \frac{0-(-1)^4}{4} + \frac{1^3-0^3}{3} - \frac{1^4-0}{4}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{8-6}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\operatorname{var}(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{1}{6} - 0^2 = \frac{1}{6}$$

$E(X)=0$; $V(X)=1/6$

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 4.1. (d): Moda, Mediana e 1º Quartil

Relembrar: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\,ds$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ \int_{-1}^{x}(1+s)\,ds = (*) & -1 < x \le 0 \\ \underbrace{\int_{-1}^{0}(1+s)\,ds}_{0.5} + \int_{0}^{x}(1-s)\,ds & 0 < x < 1 \\ 1.0 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$(*) = \int_{-1}^{x}(1+s)\,ds = (x+1) + \frac{x^2-(-1)^2}{2} = \boxed{x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}}$$

$F_X(0) = \frac{1}{2} = 0.5 \Rightarrow$ mediana $= 0$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x^2/2 + x + 1/2, & -1 \le x < 0 \\ -x^2/2 + x + 1/2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

moda = 0; mediana = 0

Slides Professora Claúdia Nunes

Não é possível apresentar a imagem.

Exercício 4.1. (d): Moda, Mediana e 1º Quartil

$x_{0.25}$ ⟺ ponto p/ o qual a função de distribuição é igual a 0.25

$$F_X(\underbrace{x_{0.25}}_{y}) = 0.25 \qquad (\, x_{0.25} \in \,]-1,0[\,)$$

$$\Downarrow$$

$$x^2/2 + x + 1/2 = 0.25 \iff y = \begin{cases} \in \,]-1,0[\\ \hline \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \boxed{x^2/2 + x + 1/2,} & -1 \le x < 0 \\ -x^2/2 + x + 1/2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

$$F_X^{-1}(1/4) = -1 + \sqrt{2}/2$$

Exercício 4.1. (e): Probabilidades

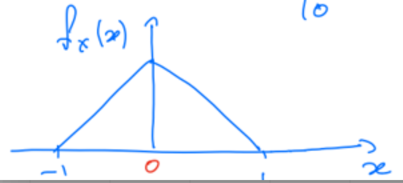
Curiosidade

Y – v.a. que representa o nº de peças que é necessário extrair da produção da máquina para termos uma peça com um desvio positivo em relação à norma.

Notação: ***Y ~ Geo(p)***.

p = P(“de uma peça ter desvio positivo em relação à norma”) = P(X >0) = 1/2 , sendo X a v.a. definida em 4.1

Relembrar: $f_X(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$



Logo, tem-se P(Y=2) = 0,5×(1-0,5) = 0,25 = 1/4

$$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$$

$$x = 1, 2, \ldots$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$$

Variáveis Aleatórias Mistas

3

Variável Aleatória Mista

- X é um **variável aleatória mista** se a respectiva função de distribuição pode ser escrita como $F(x) = \lambda F_1(x) + (1-\lambda)F_2(x)$, $(0 < \lambda < 1)$ onde:
  - $F_1 \rightarrow$ função de distribuição associada a uma variável aleatória discreta;
  - $F_2 \rightarrow$ função de distribuição associada a uma variável aleatória contínua.

Murteira et al (2015)

Variável Aleatória Mista: Exemplo

Seja $U \sim \mathrm{Unif}([0,4])$. Seja X uma VA definida da seguinte maneira:

- Se $U \leq 1$, então $X \sim \mathrm{Unif}([0,2])$.
- Caso contrário, então $X \sim \mathrm{Bern}(2/3)$.

Pelo **teorema da probabilidade total**:

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \leq 1)}_{\sim \mathrm{Unif}([0,2])} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim \mathrm{Bern}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

Obrigada!

Questões?